4 EL PÉNDULO DE TORSIÓN

1.- OBJETIVOS

a) Medir el módulo de torsión de un alambre de acero por medio de oscilaciones torsionales.
b) Medir el momento de inercia de un disco no homogéneo a partir del período de sus oscilaciones torsionales.

2.- MATERIALES

- Péndulo de torsión
- Cinta métrica
- Regla graduada
- Vernier
- Cronómetro
- Tornillo micrométrico
- Dos pesas de 1 kg. cada una

3.- TEORÍA

Se tiene un péndulo de torsión formado por un cable de acero de longitud **L** y diámetro **d** (**d**<<**L**) dispuesto verticalmente, con el extremo superior fijo, y el extremo inferior unido al punto medio de un disco de masa **M** y radio **R** (fig.1).

Si se aplica un torque que haga rotar el disco un ángulo **β** con relación a su posición de equilibrio, debido a la elasticidad del alambre se producirá, un torque **τ** en sentido

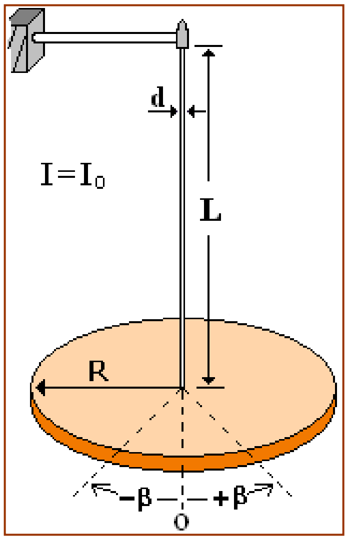

Fig. 1

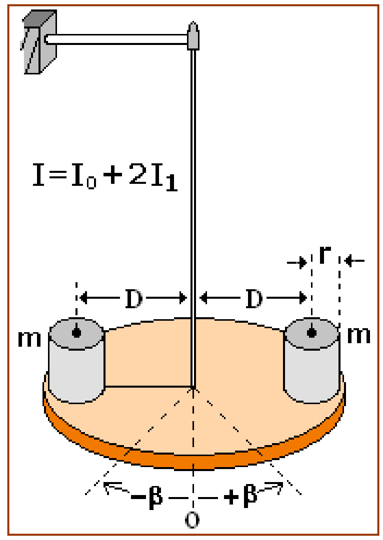

Fig. 2

contrario a la rotación, que tenderá a restablecer la posición inicial. Dentro de los límites de validez de la Ley de Hooke, este torque restaurador, es proporcional al ángulo **β** y se puede expresar como:

$$\tau = -k\beta \qquad (1)$$

Donde ***k*** es la *constante de torsión* del alambre, que depende del material y de la geometría del alambre. Si se conoce *k*, se pude calcular el *módulo de torsión* ***M*** del material, el cual es propio del material del alambre y no depende de la muestra particular que usemos. Para un alambre determinado, ***M*** está relacionado con *k*, con la longitud del alambre *L*, y, con el diámetro del mismo *d*, por la relación:

$$M = \frac{32Lk}{\pi d^4} \qquad (2)$$

Volviendo a la idea anterior, una vez que se libera el disco después de haberlo girado un ángulo β, el torque restaurador **τ** produce oscilaciones armónicas simples en torno a la posición de equilibrio, rotando entre -β y +β (Fig. 1).

De la segunda ley de Newton se tiene: $\tau = I\alpha$ (3)

donde *I* es el momento de inercia del disco respecto al eje de rotación, y $\alpha = \dfrac{d^2\beta}{dt^2}$ la aceleración angular.

Igualando (1) con (3) se obtiene: $$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\beta \qquad (4)$$

Que corresponde a la ecuación diferencial de un movimiento oscilatorio armónico simple, que tiene entre sus soluciones:

$$\beta = \beta_0 \cos(\omega t + \phi) \qquad (5a)$$

con β_0 la amplitud angular de oscilación o ángulo girado para iniciar las oscilaciones, ϕ la constante de fase que depende de las condiciones iniciales del movimiento y ω la frecuencia angular, la cual se puede expresar en función del período T como:

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Si en la ecuación diferencial (4) se sustituye β por la expresión (5a), se encuentra que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \quad (5b) \qquad \text{y, en consecuencia:} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (6)$$

Así; si se mide el período de oscilación, la relación (6) permite calcular I si se conoce k, y viceversa. Pero, si se quiere calcular ambos se necesita otra ecuación que relacione las dos incógnitas. Esto se logra modificando el momento de inercia, y volviendo a medir el período de oscilación, para el nuevo momento de inercia.

Una manera de modificar el momento de inercia es, agregar al disco dos cuerpos cilíndricos iguales de masa m y radio r, simétricamente colocados a una distancia D del eje de rotación (Fig. 2). Si denotamos con I_0 al momento de inercia sin las masas adicionales, y con I_1 al momento de inercia de cada una de las masas respecto del mismo eje de rotación, el nuevo momento de inercia total I, es:

$$I = I_0 + 2I_1 \qquad \text{con} \qquad I_1 = m\left(\frac{1}{2}r^2 + D^2\right) \qquad (7)$$

Los períodos de oscilación para cada momento de inercia son:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{k}} \qquad \text{y} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2I_1}{k}}$$

Con estas dos ecuaciones y sustituyendo I_1 por su valor, se tiene la relación:

$$I_0 = \left(\frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2}\right)\left(r^2 + 2D^2\right)m \qquad (8)$$

Esta relación permite conocer I_0 si se conocen los períodos de oscilación correspondientes a cada momento de inercia. También, de la relación (8), se encuentra para el error relativo del momento de inercia I_0:

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{2\Delta T_0}{T_0} + \frac{2}{\left(T^2 - T_0^2\right)}\left(T\Delta T + T_0 \Delta T_0\right) + \frac{2}{\left(r^2 + 2D^2\right)}\left(r\Delta r + 2D\Delta D\right) + \frac{\Delta m}{m} \qquad (9)$$

De la ecuación (6) obtenemos para la *constante de torsión* del alambre:

$$k = 4\pi^2 \frac{I_o}{T_0^2} \qquad (10) \qquad \text{con un error relativo:} \quad \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta I_o}{I_o} + 2\frac{\Delta T_o}{T_o} \qquad (11)$$

Con la ecuación (2), se puede calcular el *módulo de torsión* M y encontrar, para su error relativo la expresión:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta k}{k} + 4\frac{\Delta d}{d} \qquad (12)$$

4.- ACTIVIDADES PREVIAS A LA SESIÓN DE PRÁCTICA

Elabora un preinforme con el siguiente contenido:

1. Describe brevemente el dispositivo experimental que usarás
2. Indica las magnitudes físicas que medirás directamente
3. Indica las magnitudes físicas que medirás indirectamente
4. Indica cuales son las magnitudes físicas de mayor interés en el experimento
5. Explica como se calcula el error estándar.

5.- PARTE EXPERIMENTAL

ACTIVIDAD 1

MEDIDA DE LA CONSTANTE DE TORSIÓN "*k*", DEL MÓDULO DE TORSIÓN "*M*", Y DEL MOMENTO DE INERCIA "I_O".

El análisis y procesamiento de los datos se hará en el libro de Excel: ***"RESORTE HELICOIDAL"***

Las **unidades** de las magnitudes físicas que se usarán, están indicadas en sus celdas correspondientes de la hoja de cálculo.

1.- Anota en las celdas indicadas de la hoja de cálculo, el error de lectura de los instrumentos: **Vernier**, **Tornillo Micrométrico, y Cinta Métrica.**

2.- Para cambiar el momento de inercia, se usará dos pesas calibradas, cada una de 1 Kg, y muy aproximadamente cilíndricas. Esto altera un poco la simetría cilíndrica, pero, garantiza la igualdad de las masas y los diámetros.

Coloca el valor de la masa "***m***" de una de las pesas en el lugar indicado.

3.- Con el tornillo micrométrico mide diez veces el diámetro ***d*** del alambre. Procura que los puntos donde midas queden igualmente espaciados en toda la longitud del mismo. Anota tus medidas en el lugar indicado de la hoja de cálculo.

4.- Con la cinta métrica mide cinco veces la longitud ***L*** del péndulo, desde el punto de sustentación hasta el punto de unión con el disco.

5.- Mide con el vernier, seis veces la distancia ***D*** entre el alambre y el centro del círculo donde colocarás las pesas. Tres veces para cada círculo.

6.- Y con el vernier, dos veces el diámetro $\boldsymbol{d_2}$ de cada una de las pesas. Anota tus medidas en el lugar indicado. Calcula los cuatro valores del radio "***r***"

7.- Calcula $\boldsymbol{d}_{(\text{promedio})}$, la desviación estándar "σ" de ***d*** y el error estándar: $\Delta d = \dfrac{3\sigma}{\sqrt{10}}$

Si este error es menor que el del instrumento de medición, toma como error el del instrumento.

8.- Calcula $\boldsymbol{L}_{(\text{promedio})}$ y $\boldsymbol{D}_{(\text{promedio})}$. Estima sus errores:

$$\Delta L = \frac{L_{MAXI} - L_{MÍNI}}{2}; \qquad \Delta D = \frac{D_{MAXI} - D_{MÍNI}}{2}$$

9.- Encuentra $\boldsymbol{r}_{(\text{promedio})}$ y estima su error: $\Delta r = \dfrac{r_{MAXI} - r_{MÍNI}}{2}$ Si este error es menor que el del instrumento de medición, toma como error el del instrumento.

Ahora, se medirá los períodos de oscilación, *To* y *T* para el disco sin las masas, y para el disco con las dos masas, respectivamente.

10.- Procede a girar el disco sin las masas (momento de inercia $\boldsymbol{I}_o$) un ángulo β ≈ 45° respecto a su posición de equilibrio, suéltalo y déjalo oscilar libremente. Mide el tiempo de 15 oscilaciones completas. Repite la medida tres veces. A anota las medidas en los lugares indicados y calcula los tres valores del período T_0.

11.- Encuentra el período promedio $\boldsymbol{T}_{o(\text{promedio})}$ y estima su error: $\Delta T_0 = \dfrac{T_{0(MAXI)} - T_{0(MINI)}}{2}$

12.- Medida del período *T* correspondiente al disco con las masas adicionales (momento de inercia ***I***) Dispón las masas sobre el disco en los lugares demarcados (***sujeta el disco mientras colocas o retiras las masas. Mantén el instrumental y los equipos electrónicos***

alejados del disco, las pesas pueden caer y dañar los equipos). Repite los procedimientos 10 y 11.

13.- Calcula el valor del momento de inercia $\boldsymbol{I}_0$ del disco:

$$I_0 = \left(\frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} \right) \left(r^2 + 2D^2 \right) m$$

14.-Encuentra el error relativo del momento de inercia con la relación (9):

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{2T}{\left(T^2 - T_0^2 \right)} \left(\frac{T \Delta T_0}{T_0} + \Delta T \right) + \frac{2}{\left(r^2 + 2D^2 \right)} \left(r \Delta r + 2D \Delta D \right)$$

Donde se ha despreciado el error Δm, del valor de las pesas calibradas y se ha reagrupado algunos términos.

15.- Calcula el error absoluto del momento de inercia ΔI_0:

$$\Delta I_0 = \left(\frac{\Delta I_0}{I_0} \right) I_0$$

Y su error porcentual: $\varepsilon\% = \left(\frac{\Delta I_0}{I_0} \right) \times 100$

16.- Encuentra la *constante de torsión* del alambre: $k = 4\pi^2 \frac{I_o}{T_0^2}$

Su error absoluto: $\Delta k = \left| \frac{\partial k}{\partial I_0} \right| \Delta I_0 + \left| \frac{\partial k}{\partial T_0} \right| \Delta T_0 = 4\pi^2 \left(\frac{\Delta I_o}{T_0^2} + 2 \frac{I_0 \Delta T_o}{T_0^3} \right)$

Y su error porcentual: $\varepsilon\% = \left(\frac{\Delta k}{k} \right) \times 100$

17.- Calcula el módulo de *torsión del acero*: $M = \frac{32Lk}{\pi d^4}$

Su error absoluto:

$$\Delta M = \left| \frac{\partial M}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial M}{\partial k} \right| \Delta k + \left| \frac{\partial M}{\partial d} \right| \Delta d = \frac{32}{d^4 \pi} \left(k \Delta L + L \Delta k + \frac{4Lk \Delta d}{d} \right)$$

Y su error porcentual: $\varepsilon\% = \left(\frac{\Delta M}{M}\right) \times 100$

ANÁLISIS

Responde claramente las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué los errores de L, D, r, T_0 y T se deben estimar de la manera indicada?

2. El módulo de torsión M del acero, varía desde 7.79×10^{11} hasta 8.11×10^{11} dinas/cm^2. ¿Consideras que el valor de M que mediste, está dentro del valor esperado? Si no es así, a que factores crees que se deba la discrepancia?

3. ¿Por qué no se tomó en cuenta el error del cronómetro?

4. ¿Cuál crees que haya sido la mayor fuente de error? Explica